

Extrémy - příklad z konzultace

Příklad 1. Určete supremum a infimum funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ na množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2z^2 = 1 \wedge x + y \leq 1\}.$$

Řešení. Množina M je uzavřená dle Věty o úrovnových množinách, neb funkce g_1, g_2 jsou spojité.

Mn. M není omezená: např. obsahuje bod $[1, y, 0]$ pro libovolné $y < 1 - x = 1 - 1 = 0$ (neb $1^2 + 2 \cdot 0^2 = 1$ a $y < 1$). Vzdálenost bodu $[1, y, 0]$ od počátku je $\sqrt{1 + y^2}$ a $\lim_{y \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + y^2} = \infty$. Z toho plyne, že neexistuje $r > 0$ takové, že $M \subseteq B(0, r)$. Tudíž M není omezená.

Z podoby f v kombinaci s faktem, že M není omezená, tušíme, že $\sup_M f = \infty$. Skutečně tomu tak je, neb pro libovolné $y < 0$ platí, že $[1, y, 0] \in M$ a $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(1, y, 0) = \lim_{y \rightarrow -\infty} 1 + y^2 = \infty$. Zbývá nám tedy určit $\inf_M f$.

Definujme funkce:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + 2z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y - 1$$

Platí $M = [g_1 = 0, g_2 \leq 0] = [g_1 = 0, g_2 < 0] \cup [g_1 = 0, g_2 = 0]$. Lze si rozmyslet, že $\text{Int } M = \emptyset$.

Zkoumejme M na jejích dvou částech. Nejdříve spočtíme gradienty funkcí.

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 4z \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $M_1 = [g_1 = 0, g_2 < 0]$ - 1 Lagrangeův multiplikátor

$$(I) \quad \nabla g_1 = 0 \iff 2x = 0 = 4z \iff [x, y, z] = [0, y, 0]$$

Ale $[0, y, 0] \notin M_1$, neboť $g_1(0, y, 0) = -1 \neq 0$. **žádný podezřelý bod.**

$$(II) \quad \nabla f(x, y, z) + \lambda \nabla g_1(x, y, z) = 0 \wedge [x, y, z] \in M_1$$

$$2x + 2\lambda x = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \xrightarrow{4} z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \text{podezřelý bod: } [0, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}] \\ x \neq 0 \implies \lambda = \frac{-2x}{2x} = -1 \xrightarrow{3} -2z = 0 \implies z = 0 \\ \xrightarrow{4} x = \pm 1 \xrightarrow{5} x = -1 \implies \text{podezřelý bod: } [-1, 0, 0] \end{cases}$$

$$2y = 0 \implies y = 0$$

$$2z + 4\lambda z = 0$$

$$x^2 + 2z^2 = 1$$

$$x + y < 1 \xrightarrow{2} x < 1$$

- $M_2 = [g_1 = 0, g_2 = 0]$ dva multiplikátory

$$(I) \quad \nabla g_1(x, y, z) = k \cdot \nabla g_2(x, y, z) \iff \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \iff k = 0 \wedge x = \frac{k}{2} = 0 \wedge z = 0$$

bod $[0, y, 0] \notin M_2$, **žádný podezřelý bod**

$$(II) \nabla f(x, y, z) + \alpha \nabla g_1(x, y, z) + \beta \nabla g_2(x, y, z) = 0 \wedge [x, y, z] \in M_2$$

ve výpočtu níže víme, že $4 + 2\alpha \neq 0$, jinak by nemohlo platit, že $x(4 + 2\alpha) = 2$.

$$2x + 2\alpha x + \beta = 0 \xrightarrow{2} x(2 + 2\alpha) - 2 + 2x = 0 \implies x(4 + 2\alpha) = 2 \implies x = \frac{2}{4 + 2\alpha}$$

$$2y + \beta = 0 \implies \beta = -2y \stackrel{5}{=} -2 + 2x$$

$$2z + 4\alpha z = 0 \implies (2 + 4\alpha)z = 0 \implies \begin{cases} z = 0 \xrightarrow{4} x = \pm 1 \\ \xrightarrow{5} \text{podezřelé body: } [1, 0, 0], [-1, 0, 2] \\ z \neq 0 \implies \alpha = -\frac{1}{2} \xrightarrow{1} x = \frac{2}{3} \xrightarrow{4} 2z^2 = \frac{5}{9} \\ \implies z = \pm \sqrt{\frac{5}{18}} \xrightarrow{5} y = \frac{1}{3} \\ \text{podezřelé body: } \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \pm \sqrt{\frac{5}{18}}\right] \end{cases}$$

$$x^2 + 2z^2 = 1$$

$$x + y = 1 \implies y = 1 - x$$

Hodnoty v podezřelých bodech:

$$f\left(0, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f(-1, 0, 0) = 1$$

$$f(1, 0, 0) = 1$$

$$f(-1, 0, 2) = 1 + 4 = 5$$

$$f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \pm \sqrt{\frac{5}{18}}\right) = \frac{5}{6}$$

Hypotéza: minimum hodnoty $\frac{1}{2}$ se nabývá v bodech $\left[0, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Zřejmě pokud za y zvolíme nulu a pokusíme se minimalizovat výraz $x^2 + z^2$, nalezneme nejmenší možnou hodnotu f na M . Stačí proto ukázat, že pro x, z takové, že $[x, 0, z] \in M$ platí $\frac{1}{2} \leq f(x, 0, z)$. Pro tato x, z platí, že $x^2 + 2z^2 = 1$, tedy $x^2 = 1 - 2z^2$. Navíc si lze rozmyslet, že $z \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. tedy nás zajímá minimální hodnota výrazu $1 - 2z^2 + z^2 = 1 - z^2$ pro $z \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Zřejmě minimum nastává pro co největší $|z|$, tedy pro $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Z toho plyne, že $\frac{1}{2}$ je skutečně minimem f na M .

Alternativně minimum:

Lze si rozmyslet, že $x^2 + 2z^2 = 1$ popisuje elipsu, jejíž body mají nejvyšší hodnotu z -ové souřadnice $\frac{1}{\sqrt{2}}$ a nejmenší $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Též si lze rozmyslet, že v rámci x se elipsa vyskytuje v rozmezí $[-1, 1]$. Danou elipsu můžeme parametrizovat např. jako $\left[\pm \sqrt{1 - 2z^2}, z\right], z \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Zajímá nás minimum funkce $g(z) = f\left(\pm \sqrt{1 - 2z^2}, z\right)$ na intervalu $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. To vyšetříme metodami z prvního semestru (jde o funkci jedné proměnné). Tj. vyšetříme, kde jsou derivace nulové a jak se chová funkce v krajních bodech intervalu.

△